ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

ΤΡΙΤΗ 23 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

Θέμα 1. **[10]** Έστω G μια κυκλική ομάδα. Να δειχθεί ότι για κάθε μη-τετριμμένη υποομάδα H της G, η ομάδα πηλίκο G/H είναι πεπερασμένη.

Θέμα 2. **[15]** Να βρεθούν οι γεννήτορες και οι υποομάδες της κυκλικής ομάδας $\mathbb{Z}_{72}$, και ακολούθως να σχεδιαστεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της. Να βρεθεί μια υποομάδα H της $\mathbb{Z}_{72}$ έτσι ώστε η ομάδα πηλίκο $\mathbb{Z}_{72}/H$ να είναι ισόμορφη με την ομάδα $\mathbb{Z}_{24}$.

Θέμα 3. 1. **[10]** Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse της συμμετρικής ομάδας S_3.

2. **[15]** Θεωρούμε την ακόλουθη μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 9 & 1 & 4 & 5 & 7 & 3 & 6 & 10 & 2 & 8 & 13 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in S_{13}$$

(α') Να γραφεί η σ ως γινόμενο ξένων κύκλων και ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.
(β') Να εξετασθεί αν η σ είναι άρτια ή περιττή μετάθεση, και να βρεθεί η τάξη της.
(γ') Να βρεθεί η ματάθεση σ^{2015}.

Θέμα 4. **1.** **[12]** Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο ρητών αριθμών

$$G = \{7^n \cdot 11^m \in \mathbb{Q} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

(α') Δείξτε ότι το G εφοδιασμένο με την πράξη πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών αποτελεί ομάδα.
(β') Με ποιά γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη η G;
(γ') Βρείτε μια κανονική υποομάδα H της G έτσι ώστε $G/H \cong \mathbb{Z}$.

2. **[13]** Έστω X ένα μη-κενό σύνολο και $(S(X), \circ)$ η ομάδα μεταθέσεων επί του X. Αν $Y \subseteq X$ είναι ένα μη-κενό πεπερασμένο υποσύνολο του X, να δειχθεί ότι το σύνολο

$$H = \{f \in S(X) \mid f(Y) \subseteq Y\}$$

είναι μια υποομάδα της $S(X)$. Να δειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι αν το υποσύνολο Y είναι άπειρο, τότε γενικά το υποσύνολο H δεν είναι υποομάδα της $S(X)$.

Θέμα 5. **[10]** Έστω ότι F είναι ένα σώμα το οποίο ικανοποιεί την ιδιότητα $\forall x \in F\backslash\{0\}$: $-x = x^{-1}$. Να δειχθεί ότι το σώμα F είναι ισόμορφο με το σώμα $\mathbb{Z}_2$.

Θέμα 6. **[20]** Έστω το ακόλουθο υποσύνολο του δακτυλίου $\mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ των 3×3 πινάκων υπεράνω του $\mathbb{R}$:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R}) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

και τα υποσύνολα του

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R}) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \;\&\; J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \;\&\; K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Να δείξετε ότι το σύνολο R είναι ένας μεταθετικός υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathsf{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Να δειχθεί ότι το υποσύνολο I είναι μέγιστο ιδεώδες του R και να προσδιορισθεί ο δακτύλιος πηλίκο R/I.
3. Να δείξετε ότι τα υποσύνολα J και K είναι ιδεώδη του R και να εξετασθεί αν είναι πρώτα ή μέγιστα.

Θέμα 7. **[20]** Θεωρούμε το σύνολο

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ (a, b) = 1, \text{ και } b : \text{ περιττός} \right\}$$

1. Να δειχθεί ότι το σύνολο R είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$.
2. Να προσδιορισθεί η ομάδα $\mathsf{U}(R)$ των αντιστρεψίμων στοιχείων του R.
3. Να δειχθεί ότι το σύνολο $I := R\backslash\mathsf{U}(R)$ των μη αντιστρεψίμων στοιχείων του R είναι ιδεώδες του R.
4. Να προσδιορισθεί ο δακτύλιος πηλίκο R/I.

- Να γραφούν τα θέματα **1.**, **2.**, **3.**, **4.**, **5.**, και μόνον ένα εκ των θεμάτων **6.**, **7.**

Καλή Επιτυχία!